

## Una radio a tachioni ~ versione numerica ~ pag.1

### Problema su spazio-tempo di Minkowski e trasformazioni di Lorentz

L'astronave di Star Trek, comandata dal comandante Kirk, parte dalla stazione spaziale Deep Space Nine, alla posizione  $x=0$  al , nell'istante  $t=0$  a , alla velocità  $v=\frac{7}{8}c$  . Spock rimane fermo sulla stazione spaziale, e all'istante  $t=2a$  invia, utilizzando una radio a tachioni, un segnale che viaggia a velocità  $2c$  verso il comandante Kirk, che, utilizzando un dispositivo identico, lo reinvia a Spock. Determina, in un diagramma spazio-tempo di Minkowski, le equazioni delle rette che rappresentano, sia nel sistema di riferimento della stazione spaziale, sia in quella dell'astronave: a) la traiettoria dell'astronave; b) quella di Spock; c) gli estremi del cono di luce; d) la traiettoria del segnale inviato da Spock; la traiettoria del segnale di risposta inviato da Kirk; e) le coordinate degli eventi che rappresentano la ricezione dei segnali da parte di Kirk e di Spock.

Nota: questo problema è ispirato al video presente all'indirizzo <https://www.youtube.com/watch?v=DlyG1WpfJaM>.

### Svolgimento

#### Astronave, sistema della stazione spaziale

Partiamo dalla definizione di velocità media, ovvero

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} .$$
 In questa formula  $x_1$  sarà la posizione nota nell'istante iniziale  $t_1$  , mentre  $t_2$  e  $x_2$  saranno il generico istante  $t$  e la relativa posizione  $x$  .

$$\frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = v_{\text{astronave}} ; \quad \frac{x - 0}{t - 0} = \frac{7}{8}c ; \quad \frac{x}{t} = \frac{7}{8}c ; \quad \frac{7}{8}c = \frac{x}{t} ; \quad ct = \frac{8}{7}x$$

#### Spock, sistema della stazione spaziale

$x=0$  (Spock è fermo nel suo sistema di riferimento).

Rette che delimitano il cono di luce, sistema della stazione spaziale  
 $ct = \pm x$  (bisettrici dei quadranti).

#### Segnale inviato da Spock, sistema della stazione spaziale

Partiamo, anche in questo caso, dalla formula che definisce la velocità media:

## Una radio a tachioni ~ versione numerica ~ pag.2

$$\frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = v_{\text{segnale}} ; \quad \frac{x - 0}{t - 2} = 2c ; \quad x = 2c(t - 2) ; \quad x = 2ct - 4c ;$$

$$2ct = x + 4c ; \quad ct = \frac{1}{2}x + 2c$$

### Evento ricezione segnale, sistema della stazione spaziale

Poiché le equazioni  $ct = \frac{1}{2}x + 2c$  e  $ct = \frac{8}{7}x$  associano rispettivamente alla posizione del segnale e a quella dell'astronave l'istante in cui tale posizione è assunta, posizione e istante della ricezione del segnale si ottengono mettendo a sistema le due equazioni ( $x$  e  $t$  devono essere gli stessi per entrambe).

$$\begin{cases} ct = \frac{1}{2}x + 2c \\ ct = \frac{8}{7}x \end{cases} ; \begin{cases} \frac{8}{7}x = \frac{1}{2}x + 2c \\ ct = \frac{8}{7}x \end{cases} ; \begin{cases} 16x = 7x + 28c \\ ct = \frac{8}{7}x \end{cases}$$

$$\begin{cases} 9x = 28c \\ ct = \frac{8}{7}x \end{cases} ; \begin{cases} x = \frac{28}{9}c \\ ct = \frac{8}{7} \cdot \frac{28}{9}c = \frac{32}{9}c \end{cases} ; \quad P\left(\frac{28}{9}c; \frac{32}{9}c\right)$$

Trasformazioni di Lorentz (da utilizzare nel seguito):

$$\begin{cases} x' = \gamma(x - Vt) \\ t' = \gamma\left(t - \frac{\beta}{c}x\right) \end{cases}$$

Trasformazioni di Lorentz inverse (si ottengono scambiando  $x$  e  $t$  con  $x'$  e  $t'$  e cambiando segno alla velocità):

$$\begin{cases} x = \gamma(x' + Vt') \\ t = \gamma\left(t' + \frac{\beta}{c}x'\right) \end{cases}$$

Calcolo di  $\gamma$  : 
$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{7}{8}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{49}{64}}} =$$

## Una radio a tachioni ~ versione numerica ~ pag.3

$$= \frac{1}{\sqrt{\frac{64-49}{64}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{15}{64}}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{15}}{8}} = \frac{8}{\sqrt{15}}$$

### Posizione ricezione segnale, sistema dell'astronave

Partiamo dalle coordinate dell'evento nel sistema della stazione spaziale:

$$\begin{cases} x = \frac{28}{9}c \\ ct = \frac{32}{9}c \end{cases}$$

e applichiamo le trasformazioni di Lorentz

$$\begin{cases} x' = \gamma(x - Vt) \\ t' = \gamma\left(t - \frac{\beta}{c}x\right) \end{cases}$$

per ricavare  $x'$  e  $t'$ . Osserviamo che  $ct = \frac{32}{9}c \Rightarrow t = \frac{32}{9}$

(dobbiamo usare usare  $ct$  nelle coordinate dell'evento,  $t$  nelle trasformazioni di Lorentz).

$$\begin{cases} x' = \frac{8}{\sqrt{15}} \left( \frac{28}{9}c - \frac{7}{8}c \cdot \frac{32}{9} \right) \\ t' = \frac{8}{\sqrt{15}} \left( \frac{32}{9} - \frac{7}{c} \cdot \frac{28}{9}c \right) \end{cases} ;$$

$$\begin{cases} x' = \frac{8}{\sqrt{15}} \left( \frac{28}{9}c - \frac{28}{9}c \right) \\ t' = \frac{8}{\sqrt{15}} \left( \frac{32}{9} - \frac{49}{18} \right) \end{cases} ;$$

$$\begin{cases} x' = \frac{8}{\sqrt{15}} \cdot 0 \\ t' = \frac{8}{\sqrt{15}} \left( \frac{64-49}{18} \right) \end{cases} ;$$

$$\begin{cases} x' = 0 \\ t' = \frac{8}{\sqrt{15}} \cdot \frac{15}{18} \end{cases} ;$$

$$\begin{cases} x' = 0 \\ t' = \frac{4}{9} \sqrt{15} \approx 1,72 a \end{cases} ;$$

## Una radio a tachioni ~ versione numerica ~ pag.4

$$\begin{cases} x' = 0 \\ ct' = \frac{4}{9} \sqrt{15} c \end{cases} \quad P' \left( 0; \frac{4}{9} \sqrt{15} c \right) \quad (\text{ovviamente } x' = 0, \text{ essendo}$$

l'astronave ferma nel proprio sistema di riferimento).

**Astronave, sistema dell'astronave**

Partiamo dalla traiettoria nel sistema della stazione spaziale, ovvero

$$ct = \frac{8}{7} x, \text{ e usiamo le trasformazioni inverse di Lorentz}$$

$$\begin{cases} x = \gamma(x' + Vt') \\ t = \gamma\left(t' + \frac{\beta}{c} x'\right) \end{cases} :$$

$$c \gamma\left(t' + \frac{\beta}{c} x'\right) = \frac{8}{7} \gamma(x' + Vt') ; \quad c \left(t' + \frac{\frac{7}{8}}{c} x'\right) = \frac{8}{7} \left(x' + \frac{7}{8} ct'\right) ;$$

$$ct' + \frac{7}{8} x' = \frac{8}{7} x' + ct' ; \quad \frac{7}{8} x' - \frac{8}{7} x' = ct' - ct' \quad \frac{49-64}{56} x' = 0 ;$$

$$-\frac{15}{56} x' = 0 ; \quad x' = 0 \quad (\text{ovvio: l'astronave è ferma nel proprio sistema}$$

di riferimento!)

**Spock, sistema dell'astronave**

Anche in questo caso partiamo dalla traiettoria nel sistema della stazione spaziale, e utilizziamo le trasformazioni inverse di Lorentz:

$$x = 0 ; \quad \gamma(x' + Vt') = 0 ; \quad x' + \frac{7}{8} ct' = 0 ; \quad \frac{7}{8} ct' = -x' ;$$

$$ct' = -\frac{8}{7} x'$$

**Rette che delimitano il cono di luce, sistema dell'astronave**

Partiamo anche in questo caso dalla traiettoria nel sistema della stazione spaziale, ovvero  $ct = \pm x$ , e utilizziamo le trasformazioni inverse di Lorentz:

## Una radio a tachioni ~ versione numerica ~ pag.5

$$c \gamma \left( t' + \frac{\beta}{c} x' \right) = \pm \gamma (x' + V t') ; \quad c \left( t' + \frac{7}{8} \frac{x'}{c} \right) = \pm \left( x' + \frac{7}{8} c t' \right) ;$$

$$c t' + \frac{7}{8} x' = \pm x' \pm \frac{7}{8} c t' ; \quad c t' \mp \frac{7}{8} c t' = \pm x' - \frac{7}{8} x' ;$$

$$c t' \left( 1 \mp \frac{7}{8} \right) = x' \left( \pm 1 - \frac{7}{8} \right) ; \quad c t' \left( 1 \mp \frac{7}{8} \right) = \pm x' \left( 1 \mp \frac{7}{8} \right) ; \quad c t' = \pm x'$$

(gli estremi del cono di luce sono SEMPRE le bisettrici dei quadranti: in altre parole, sono invarianti per le trasformazioni di Lorentz)

### Traiettoria del segnale di risposta, sistema dell'astronave

Partiamo, anche in questo caso, dalla formula che definisce la velocità media.

$$\frac{x'_2 - x'_1}{t'_2 - t'_1} = v_{\text{segnale}} ; \quad \frac{x' - 0}{t' - \frac{4}{9} \sqrt{15}} = 2c ; \quad x' = 2c \left( t' - \frac{4}{9} \sqrt{15} \right) ;$$

$$x' = 2c t' - \frac{4}{9} c \sqrt{15} ; \quad 2c t' = x' + \frac{4}{9} c \sqrt{15} ; \quad c t' = \frac{1}{2} x' + \frac{4}{9} c \sqrt{15}$$

### Traiettoria del segnale di risposta, sistema della stazione spaziale

Stavolta partiamo dalla traiettoria nel sistema dell'astronave, e utilizziamo le trasformazioni di Lorentz.

$$c t' = \frac{1}{2} x' + \frac{4}{9} c \sqrt{15} ; \quad c \gamma \left( t - \frac{\beta}{c} x \right) = \frac{1}{2} \gamma (x - V t) + \frac{4}{9} c \sqrt{15} ;$$

$$c \cdot \frac{8}{\sqrt{15}} \left( t - \frac{7}{8} \frac{x}{c} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{8}{\sqrt{15}} \left( x - \frac{7}{8} c t \right) + \frac{4}{9} c \sqrt{15} ;$$

$$\frac{\sqrt{15}}{8} \cdot c \cdot \frac{8}{\sqrt{15}} \left( t - \frac{7}{8} \frac{x}{c} \right) = \frac{\sqrt{15}}{8} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{8}{\sqrt{15}} \left( x - \frac{7}{8} c t \right) + \frac{\sqrt{15}}{8} \cdot \frac{4}{9} c \sqrt{15} ;$$

$$c \left( t - \frac{7}{8} \frac{x}{c} \right) = \frac{1}{2} \left( x - \frac{7}{8} c t \right) + \frac{4(\sqrt{15})^2}{8 \cdot 9} c ; \quad c t - \frac{7}{8} x = \frac{1}{2} x - \frac{7}{16} c t + \frac{15}{18} c ;$$

## Una radio a tachioni ~ versione numerica ~ pag.6

$$ct + \frac{7}{16} ct = \frac{1}{2}x + \frac{7}{8}x + \frac{5}{6}c ;$$

$$ct \left( 1 + \frac{7}{16} \right) = \left( \frac{1}{2} + \frac{7}{8} \right) x + \frac{5}{6}c ;$$

$$ct \left( \frac{16+7}{16} \right) = \left( \frac{4+7}{8} \right) x + \frac{5}{6}c ;$$

$$\frac{23}{16} ct = \frac{11}{8} x + \frac{5}{6}c ;$$

$$\frac{16}{23} \cdot \frac{23}{16} ct = \frac{16}{23} \cdot \frac{11}{8} x + \frac{16}{23} \cdot \frac{5}{6}c ; \quad ct = \frac{22}{23} x + \frac{40}{69}c .$$

### Ricezione del segnale di risposta, sistema della stazione spaziale

Poiché le equazioni  $ct = \frac{22}{23}x + \frac{40}{69}c$  e  $x=0$  associano rispettivamente alla posizione del segnale e a quella della stazione spaziale l'istante in cui tale posizione è assunta, posizione e istante della ricezione del segnale di risposta si ottengono mettendo a sistema le due equazioni (  $x$  e  $t$  devono essere gli stessi per entrambe).

$$\begin{cases} ct = \frac{22}{23}x + \frac{40}{69}c \\ x=0 \end{cases} ; \quad \begin{cases} ct = \frac{40}{69}c \\ x=0 \end{cases} ; \quad Q \left( 0 ; \frac{40}{69}c \right) . \text{ Il segnale di risposta}$$

viene ricevuto all'istante  $t_2 = \frac{40}{69} \approx 0,58a$  , ovvero molto prima (più di 1 anno e 5 mesi prima) dell'istante dell'invio del primo segnale, che è  $t_1 = 2a$  ! Se fosse possibile realizzare una radio a tachioni, potremmo mandare segnali nel passato (e, quindi, influenzarlo)!