INTEGRALI PER SOSTITUZIONE

Un integrale può essere risolto per sostituzione mediante una variabile ausiliaria. Per utilizzare questo metodo è necessario, preliminarmente:

- **x in funzione di t ($x=f(t)$);**
- **dx in funzione di dt, dove $dx=\frac{dx}{dt}dt=f'(t)dt$ [1];**
- **t in funzione di x ($t=f^{-1}(x)$, ovvero la funzione inversa di $x=f(t)$);**
- **solo se l'integrale è definito, i valori corrispondenti degli estremi di integrazione.**

Esempio 1: calcola $\int e^{4x}dx$

Potremmo calcolare facilmente questo integrale come generalizzazione di $\int e^x dx=e^x+C$, ovvero utilizzando la formula $\int f'(x)\cdot e^{f(x)}dx=e^{f(x)}+C$. Tuttavia, in questo caso utilizzeremo la variabile ausiliaria $t=4x$. Quindi:

- **t in funzione di x: $t=4x$;**
- **x in funzione di t: $x=\frac{t}{4}$ (dividendo entrambi i membri di $t=4x$ per 4);**
- **dx in funzione di dt: $dx=\frac{dx}{dt}dt=D\left(\frac{t}{4}\right)dt=D\left(\frac{1}{4}t\right)dt=\frac{1}{4}dt$.**

Di conseguenza:

$$\int e^{4x}dx=\int e^{t}\frac{1}{4}dt=$$

Portiamo fuori dall'integrale la costante moltiplicativa:

$$=\frac{1}{4}\int e^t dt=$$

Utilizziamo la formula $\int e^x dx=e^x+C$:

$$=\frac{1}{4}e^t+C=$$

Non dimentichiamo, una volta calcolato l'integrale, di eliminare la variabile ausiliaria, in questo caso utilizzando $t=4x$:

$$=\frac{1}{4}e^{4x}+C\ .$$

---

1 Come al solito, il simbolo $\frac{dx}{dt}$ indica la derivata di x rispetto a t, ovvero, essendo $x=f(t)$, $f'(t)$.

Riepilogando,

$$\int e^{4x}dx=\frac{1}{4}e^{4x}+C \quad .$$

Esempio 2: calcola $\int \sqrt{1-x^2}\,dx$ **.**

Per risolvere questo integrale, poniamo $x=sen\,t$ **. Quindi:**

- **t in funzione di x:** $x=sen\,t$ **;**
- **x in funzione di t:** $t=arcsen\,x$ **(l'arcoseno è la funzione inversa del seno);**
- **dx in funzione di dt:** $dx=\frac{dx}{dt}dt=D(sen\,t)\,dt=cos\,t\,dt$ **.**

Di conseguenza:

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx=\int \sqrt{1-sen^2t}\,\cos t\,dt=$$

Ricordiamo che $\cos t=\pm\sqrt{1-sen^2t}$ **. Avendo scelto** $t=arcsen\,x$ **come funzione inversa di** $x=sen\,t$ **, ed essendo l'arcoseno di** x **l'angolo compreso tra** $-\frac{\pi}{2}$ **e** $\frac{\pi}{2}$ **(estremi inclusi) il cui seno vale x, segue che l'angolo t può appartenere solo al primo o al quarto quadrante, dove** $\cos t\geq 0$ **, e quindi** $\cos t=\sqrt{1-sen^2t}$ **. Sostituiamo quindi** $\cos t$ **al posto di** $\sqrt{1-sen^2t}$ **:**

$$=\int \cos t\cos t\,dt=\int \cos^2t\,dt=$$

L'integrale di $\cos^2t$ **può essere calcolato usando le formule di bisezione: poiché** $\cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$ **, elevando a quadrato si ottiene** $\cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{2}$ **. Inoltre, ponendo** $t=\frac{\alpha}{2}$ **(e quindi** $\alpha=2t$ **), ne deriva** $\cos^2t=\frac{1+\cos(2t)}{2}$ **. Sostituiamo quindi** $\frac{1+\cos(2t)}{2}$ **al posto di** $\cos^2t$ **:**

$$=\int \frac{1+\cos(2t)}{2}dt=\int \frac{1}{2}[1+\cos(2t)]\,dt=$$

Portiamo fuori dall'integrale la costante moltiplicativa:

$$=\frac{1}{2}\int [1+\cos(2t)]\,dt=$$

Spezziamo l'integrale:

$$=\frac{1}{2}\left[\int dt+\int \cos(2t)\,dt\right]dt=$$

La scrittura $\int dt$ è un modo abbreviato di indicare $\int 1\cdot dt$, e quindi la funzione integranda è 1. Poiché $\int f(t)\,dt$ è l'insieme delle funzioni che hanno per derivata $f(t)$, e poiché la derivata di t (, più in generale, quella di $t+C$ è 1, $\int dt=t+C$. Allo stesso risultato saremmo pervenuti ricordando che $1=t^0$, e quindi, utilizzando la formula $\int x^n\,dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+C$, $\int dt=\int 1\cdot dt=\int t^0\,dt=\frac{t^1}{1}+C=t+C$.

Quindi, calcolando il primo integrale otteniamo:

$$=\frac{1}{2}\left[t+\int \cos(2t)\,dt\right]dt=$$

Come al solito, non mettiamo la costante di integrazione quando è ancora sottintesa in un integrale ancora presente nell'espressione.

Per calcolare $\int \cos(2t)\,dt$ utilizzeremo la generalizzazione della formula $\int \cos x\,dx=\operatorname{sen}x+C$, ovvero (utilizzando anche t al posto di x) $\int f'(t)\cos f(t)\,dt=\operatorname{sen}f(t)+C$. Poiché $f(t)$ è l'argomento $2t$ del coseno, e inoltre abbiamo bisogno di avere, dentro l'integrale, la quantità moltiplicativa $f'(t)=D(2t)=2$, moltiplichiamo e dividiamo per 2 dentro l'integrale rimasto:

$$=\frac{1}{2}\left[t+\int \frac{1}{2}\cdot 2\cos(2t)\,dt\right]dt=$$

Portiamo fuori dall'integrale la costante moltiplicativa che non ci serve per applicare la formula $\int f'(t)\cos f(t)\,dx=\operatorname{sen}f(t)+C$:

$$=\frac{1}{2}\left[t+\frac{1}{2}\int 2\cos(2t)\,dt\right]dt=$$

Utilizziamo la formula $\int f'(t)\cos f(t)\,dt=\operatorname{sen}f(t)+C$, dove $f(t)=2t$

$$=\frac{1}{2}\left[t+\frac{1}{2}\operatorname{sen}(2t)\right]+C=$$

Ora non dimentichiamo di eliminare la variabile ausiliaria t, esprimendola in funzione di x. Non ci sono dubbi per la prima t, visto che $t=\operatorname{arcsen}x$, mentre eviteremo di sostituire $\operatorname{sen}(2t)$ con

$sen(2\,arcsen\,x)$ (espressione alquanto bruttina, se possiamo evitarla). Cercheremo quindi di esprimere $sen(2t)$ in funzione di $sen\,t$, sostituendo successivamente $sen\,t$ con x (visto che $x = sen\,t$). Utilizziamo la formula di duplicazione del seno ($sen(2t) = 2\,sen\,t\cos t$:

$$= \frac{1}{2}\left[t + \frac{1}{2}2\,sen\,t\cos t\right] + C = \frac{1}{2}[t + sen\,t\cos t] + C = \frac{t + sen\,t\cos t}{2} + C =$$

Esprimiamo il coseno in funzione del seno. Nuovamente, $\cos t = \pm\sqrt{1 - sen^2 t}$; inoltre abbiamo scelto come funzione inversa $x = sen\,t$ di $t = arcsen\,x$ (ovvero t è l'angolo compreso tra $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$, estremi inclusi, il cui seno vale x). Quindi, come già ricordato, l'angolo t può appartenere solo al primo o al quarto quadrante, dove $\cos t \geq 0$, e di conseguenza $\cos t = +\sqrt{1 - sen^2 t}$.
Sostituiamo quindi $\sqrt{1 - sen^2 t}$ al posto di $\cos t$:

$$= \frac{t + sen\,t\sqrt{1 - sen^2 t}}{2} + C =$$

Sostituiamo la prima t con $t = arcsen\,x$ e $sen\,t$ con x :

$$= \frac{arcsen\,x + x\sqrt{1 - x^2}}{2} + C$$

Riepilogando,

$$\int \sqrt{1 - x^2}\,dx = \frac{arcsen\,x + x\sqrt{1 - x^2}}{2} + C \quad .$$

Esempio 3: calcola $\int \frac{4}{x^2 - 2x + 10}dx$

Calcoliamo per prima cosa $\Delta = b^2 - 4ac$:

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 10 = 4 - 40 = -36 < 0$$

Possiamo calcolare un integrale del tipo $\int \frac{q}{ax^2 + bx + c}dx$, con $\Delta = b^2 - 4ac < 0$, utilizzando la variabile ausiliaria $t = \frac{D(ax^2 + bx + c)}{\sqrt{-\Delta}} = \frac{2ax + b}{\sqrt{-\Delta}}$. Quindi:

- t in funzione di x:

$$t=\frac{2ax+b}{\sqrt{-\Delta}}=\frac{2x-2}{\sqrt{36}}=\frac{2x-2}{6}=\frac{2(x-1)}{6}=\frac{x-1}{3}$$ **, ovvero** $t=\frac{x-1}{3}$ **;**

● x in funzione di t: risolviamo l'equazione $t=\frac{x-1}{3}$ **rispetto ad** x **:**

Moltiplichiamo entrambi i membri per 3:

$$3t=x-1$$

Scambiamo il primo con il secondo membro:

$$x-1=3t$$

Ricaviamo x, portando i termini noti a secondo membro:

$$x=3t+1$$

● dx in funzione di dt: $dx=\frac{dx}{dt}dt=D(3t+1)dt=3\,dt$ **.**

Quindi:

$$\int\frac{4}{x^2-2x+10}dx=\int\frac{4}{(3t+1)^2-2(3t+1)+10}3\,dt=$$

Effettuiamo i calcoli, facendo molta attenzione, perché, come in un orologio svizzero, un piccolo errore sarebbe fatale, e non ci porterebbe all'espressione dovuta, ovvero, a meno di eventuali costanti moltiplicative, $\int\frac{1}{1+t^2}dt$ **:**

$$=\int\frac{12}{9t^2+6t+1-6t-2+10}dt=\int\frac{12}{9t^2+9}dt=\int\frac{12}{9(t^2+1)}dt=$$

$$=\int\frac{4}{3(t^2+1)}=$$

Portiamo fuori dall'integrale le costanti moltiplicative:

$$=\frac{4}{3}\int\frac{1}{t^2+1}=$$

Calcoliamo l'integrale immediato $\int\frac{1}{1+t^2}dt=arctg\,t+C$ **:**

$$=\frac{4}{3}arctg\,t+C=$$

Non dimentichiamo di eliminare la variabile ausiliaria. Poiché $t=\frac{x-1}{3}$ **, sostituiamo** $\frac{x-1}{3}$ **al posto di** t **:**

$$=\frac{4}{3}arctg\frac{x-1}{3}+C$$

Riepilogando,

$$\int \frac{4}{x^2-2x+10}dx=\frac{4}{3}arctg\frac{x-1}{3}+C$$

Esempio 4: calcola $\int_0^{\frac{2}{3}}\sqrt{4-9x^2}\,dx$ **.**

Per risolvere questo integrale, poniamo $x=\frac{2}{3}sen\,t$ **(l'obiettivo è quello di trasformare la radice, a meno di costanti moltiplicative, in** $\sqrt{1-sen^2t}$ **: quindi abbiamo bisogno di un 9 al denominatore perché si semplifichi con il coefficiente** $9x^2$ **, e di un 4 al numeratore per poter mettere in evidenza 4 sotto radice; si noti che, siccome sotto radice abbiamo** x^2 **, sostituendo** $x=\frac{2}{3}sen\,t$ **il 2 diventerà** $2^2=4$ **, e il 3 diventerà** $3^2=9$ **). Quindi:**

- **t in funzione di x:** $x=\frac{2}{3}sen\,t$ **;**
- **x in funzione di t: ricaviamo per prima cosa** $sen\,t$ **:**

$$sen\,t=\frac{3}{2}x$$

Poiché l'arcoseno è la funzione inversa del seno,

$t=arcsen\left(\frac{3}{2}x\right)$ **(t è l'angolo compreso tra** $-\frac{\pi}{2}$ **e** $\frac{\pi}{2}$ **, estremi inclusi, il cui seno vale** $\frac{3}{2}x$ **);**

- **dx in funzione di dt:** $dx=\frac{dx}{dt}dt=D\left(\frac{2}{3}sen\,t\right)dt=\frac{2}{3}\cos t\,dt$ **;**
- **valore corrispondente del primo estremo di integrazione, ovvero** $x_1=0$ **: poiché** $t=arcsen\left(\frac{3}{2}x\right)$ **,** $t_1=arcsen\left(\frac{3}{2}\cdot 0\right)=arcsen\,0=0$

(l'arcoseno di 0 è l'angolo compreso tra $-\frac{\pi}{2}$ **e** $\frac{\pi}{2}$ **, estremi inclusi, il cui seno vale 0, cioé 0, perché** $sen\,0=0$ **);**

- **valore corrispondente del secondo estremo di integrazione, ovvero** $x_1=\frac{2}{3}$ **: poiché** $t=arcsen\left(\frac{3}{2}x\right)$ **,** $t_2=arcsen\left(\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}\right)=arcsen\,1=\frac{\pi}{2}$

(l'arcoseno di 1 è l'angolo compreso tra $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$, estremi inclusi, il cui seno vale 1, cioé $\frac{\pi}{2}$, perché $sen\frac{\pi}{2}=1$).

Riepilogando, $sen\,t=\frac{3}{2}x$, $t=arcsen\left(\frac{3}{2}x\right)$, $dx=\frac{3}{2}\cos t\,dt$, mentre gli estremi di integrazione 0 e $\frac{2}{3}$ diventano rispettivamente 0 e $\frac{\pi}{2}$. Di conseguenza:

$$\int_0^{\frac{2}{3}}\sqrt{4-9x^2}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{4-9\left(\frac{2}{3}sen\,t\right)^2}\cdot\frac{2}{3}\cos t\,dt=$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{4-9\left(\frac{4}{9}sen^2t\right)}\cdot\frac{2}{3}\cos t\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{4-4\,sen^2t}\cdot\frac{2}{3}\cos t\,dt=$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{4(1-sen^2t)}\cdot\frac{2}{3}\cos t\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\sqrt{1-sen^2t}\cdot\frac{2}{3}\cos t\,dt=$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{4}{3}\sqrt{1-sen^2t}\cdot\cos t\,dt=$$

Portiamo fuori dall'integrale la costante moltiplicativa:

$$=\frac{4}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-sen^2t}\cdot\cos t\,dt=$$

Come nell'esempio 2, $\cos t=\pm\sqrt{1-sen^2t}$. Inoltre, essendo $t=arcsen\left(\frac{3}{2}x\right)$ l'angolo compreso tra $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$ (estremi inclusi) il cui seno vale $\frac{3}{2}x$, segue che l'angolo t può appartenere solo al primo o al quarto quadrante, dove $\cos t\geq 0$, e quindi $\cos t=\sqrt{1-sen^2t}$. Sostituiamo quindi $\cos t$ al posto di $\sqrt{1-sen^2t}$:

$$=\frac{4}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t\cdot\cos t\,dt=\frac{4}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2t\,dt=$$

Utilizzando le formule di bisezione (vedi esempio 2), $\cos^2 t = \frac{1+\cos(2t)}{2}$, da cui:

$$= \frac{4}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos(2t)}{2}\,dt =$$

Portiamo fuori dall'integrale la costante moltiplicativa:

$$= \frac{4}{3}\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} [1+\cos(2t)]\,dt = \frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} [1+\cos(2t)]\,dt =$$

Spezziamo l'integrale (essendo un integrale definito, ricordiamo di indicare in entrambi gli integrali gli estremi di integrazione):

$$= \frac{2}{3}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2t)\,dt\right] =$$

Ricordiamo che $\int dt = \int 1\cdot dt = \int t^0\,dt = \frac{t^1}{1} + C = t + C$, dove t (il risultato senza la costante C) è una primitiva della funzione integranda 1. Tuttavia $\int_0^{\frac{\pi}{2}} dt$ è un integrale definito: detta $F(t)$ una qualunque primitiva della funzione integranda $f(t)$ (nel nostro caso $f(t)=1$ e $F(t)=t$), e detti a e b gli estremi di integrazione (nel nostro caso $a=0$ e $b=\frac{\pi}{2}$) l'integrale definito è uguale alla differenza tra i valori assunti da $F(t)$ rispettivamente in b e in a , ovvero $\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)$. Per semplificare i calcoli, si indica inizialmente con $[F(t)]_a^b$ la quantità $F(b)-F(a)$. Quindi, in particolare, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} dt = [t]_0^{\frac{\pi}{2}}$, dove $[t]_0^{\frac{\pi}{2}}$ è un modo abbreviato di indicare $\frac{\pi}{2} - 0$. Calcoliamo quindi il primo integrale:

$$= \frac{2}{3}\left[[t]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2t)\,dt\right] = \frac{2}{3}\left[\frac{\pi}{2} - 0 + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2t)\,dt\right] =$$

Si noti che $[t]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}-0$ **in quanto, essendo, nel nostro caso,** $F(t)=t$, $F\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}$ **(** $F\left(\frac{\pi}{2}\right)$ **è il valore che si ottiene sostituendo, nella funzione** $F(t)=t$, $\frac{\pi}{2}$ **al posto di** t **) e** $F(0)=0$ **(** $F(0)$ **è il valore che si ottiene sostituendo, nella funzione** $F(t)=t$, 0 **al posto di** t **). Di conseguenza,** $F(b)-F(a)=F\left(\frac{\pi}{2}\right)-F(0)=\frac{\pi}{2}-0$.

Proseguiamo i calcoli:

$$=\frac{2}{3}\left[\frac{\pi}{2}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(2t)\,dt\right]=\frac{2}{3}\cdot\frac{\pi}{2}+\frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(2t)\,dt=$$

$$=\frac{\pi}{3}+\frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(2t)\,dt=$$

Per calcolare $\int\cos(2t)\,dt$ **utilizzeremo la generalizzazione della formula** $\int cosx\,dx=senx+C$ **, ovvero (utilizzando anche t al posto di x)** $\int f'(t)\cos f(t)\,dx=sen f(t)+C$ **. Poiché** $f(t)$ **è l'argomento** $2t$ **del coseno, e inoltre abbiamo bisogno di avere, dentro l'integrale, la quantità moltiplicativa** $f'(t)=D(2t)=2$ **, moltiplichiamo e dividiamo per 2 dentro l'integrale rimasto:**

$$=\frac{\pi}{3}+\frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}\cdot 2\cos(2t)\,dt=$$

Portiamo fuori dall'integrale la costante moltiplicativa che non ci serve per applicare la formula $\int f'(t)\cos f(t)\,dx=sen f(t)+C$ **:**

$$=\frac{\pi}{3}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}\cdot 2}2\cos(2t)\,dt=\frac{\pi}{3}+\frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\cos(2t)\,dt=$$

Utilizziamo la formula $\int f'(t)\cos f(t)\,dx=sen f(t)+C$ **, dove** $f(t)=2t$ **. Non dimentichiamo che stiamo calcolando un integrale definito, per cui la primitiva** $sen(2x)$ **, ovvero l'integrale indefinito senza la costante C, ma messa tra parentesi quadre, indicando a destra gli estremi di integrazione:**

$$=\frac{\pi}{3}+\frac{1}{3}[sen(2x)]_0^{\frac{\pi}{2}}=$$

In questo caso una primitiva della funzione integranda $f(t)=2\cos(2t)$ è $F(t)=sen(2t)$, quindi, essendo nuovamente $a=0$ e $b=\frac{\pi}{2}$, stavolta $F\left(\frac{\pi}{2}\right)=sen\left(2\cdot\frac{\pi}{2}\right)$ ($F\left(\frac{\pi}{2}\right)$ è il valore che si ottiene sostituendo, nella funzione $F(t)=sen(2t)$, $\frac{\pi}{2}$ al posto di t) e $F(0)=sen(2\cdot 0)$ ($F(0)$ è il valore che si ottiene sostituendo, nella funzione $F(t)=sen(2t)$, 0 al posto di t). Di conseguenza, $F(b)-F(a)=F\left(\frac{\pi}{2}\right)-F(0)=sen\left(2\cdot\frac{\pi}{2}\right)-sen(2\cdot 0)$:

$$=\frac{\pi}{3}+\frac{1}{3}\left[sen\left(2\cdot\frac{\pi}{2}\right)-sen(2\cdot 0)\right]=\frac{\pi}{3}+\frac{1}{3}[sen\,\pi-sen\,0]=$$

$$=\frac{\pi}{3}+\frac{1}{3}[0-0]=\frac{\pi}{3}\ .$$

Riepilogando,

$$\int_0^{\frac{2}{3}}\sqrt{4-9x^2}\,dx=\frac{\pi}{3}$$

Si noti che, per un integrale definito, non c'è bisogno, quando applichiamo il metodo di sostituzione, di eliminare la variabile ausiliaria dopo aver calcolato l'integrale, visto che questa viene già rimossa sostituendo al suo posto gli estremi di integrazione. È tuttavia imprescindibile ricordare di sostituire i valori originali degli estremi di integrazione con i valori corrispondenti della variabile ausiliaria quando esprimiamo, all'inizio, x e dx in funzione di t e dt .

Esempio 5: calcola $\int\frac{1}{senx+1}dx$

Gli integrali del tipo $\int\frac{q}{a\,sen\,x+b\cos x+c}dx$ possono essere risolti usando le seguenti formule, chiamate formule parametriche (da imparare a memoria):

$$senx=\frac{2\,tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}$$

$$cosx=\frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}$$

Sostituendo $\frac{2\,tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}$ **al posto di** $senx$ **si ottiene:**

$$\int\frac{1}{senx+1}dx=\int\frac{1}{\frac{2\,tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}+1}dx=$$

Le frazioni di frazione sono brutte e cattive, per cui dobbiamo trasformarle, moltiplicando il numeratore per l'inverso del denominatore. Attenzione!!! L'inverso di $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}$ **NON È** $\frac{b}{a}+\frac{d}{c}$ **, per cui prima di eliminare la frazione di frazione dobbiamo calcolare il minimo comune multiplo del suo denominatore, trasformando la somma che contiene in un'unica frazione:**

$$=\int\frac{1}{\frac{2\,tg\frac{x}{2}+1+tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}}dx=\int\frac{1+tg^2\frac{x}{2}}{2\,tg\frac{x}{2}+1+tg^2\frac{x}{2}}dx=$$

Poniamo $t=tg\frac{x}{2}$ **, e applichiamo il metodo di sostituzione:**

● t in funzione di x: $t=tg\frac{x}{2}$ **;**

● x in funzione di t: innanzitutto $\frac{x}{2}=arctg\,t$ **(l'arcotangente di** t **è l'angolo, compreso tra** $-\frac{\pi}{2}$ **e** $\frac{\pi}{2}$ **(estremi esclusi), la cui tangente vale** t **. Inoltre, se moltiplichiamo entrambi i membri per 2, otteniamo** $x=2\,arctg\,t$ **:**

● dx in funzione di dt:

$$dx=\frac{dx}{dt}dt=D(2\,arctg\,t)\,dt=2\cdot\frac{1}{1+t^2}dt=\frac{2}{1+t^2}dt\quad .$$

Di conseguenza:

$$=\int\frac{1+tg^2\frac{x}{2}}{tg^2\frac{x}{2}+2\,tg\frac{x}{2}+1}dx=\int\frac{1+t^2}{t^2+2t+1}\cdot\frac{2}{1+t^2}dt=$$

Semplifichiamo e moltiplichiamo le frazioni:

$$=\int\frac{2}{t^2+2t+1}dt=$$

Ma questo è l'integrale di una funzione razionale fratta, e ormai dovreste essere bravissimi a risolverlo e andare avanti (non dimenticate di eliminare la variabile ausiliaria t alla fine, eh). Suggerimento: poiché $t^2+2t+1=(t+1)^2$, siamo nel caso $\Delta=0$, quindi imponiamo

$$\frac{2}{t^2+2t+1}\equiv\frac{A}{t+1}+\frac{B}{(t+1)^2}\quad .$$

Osservazioni finali: alcuni integrali, che potrebbero sembrare simili a qualche esempio illustrato in questa lezione, potrebbero invece essere risolti in modi diversi, magari molto più semplici.

Esempio 1: $\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=arcsen\,x+C$ **(è un integrale immediato).**

Esempio 2:

$$\int\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx=\int x\cdot(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}dx=-\frac{1}{2}\int-2x\cdot(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}dx=$$

$$=-\frac{1}{2}\cdot\frac{(1-x^2)^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}+C=-\frac{1}{2}\cdot\frac{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}+C=-(1-x^2)^{\frac{1}{2}}+C=$$

$$=-\sqrt{1-x^2}+C$$

Esempio 3: $\int tgx\,dx=\int\frac{sen\,x}{\cos x}dx=-\int\frac{-sen\,x}{\cos x}dx=$

$$=-\int\frac{D(\cos x)}{\cos x}dx=-\ln|\cos x|+C$$

Esercizi (da risolvere tutti con il metodo di sostituzione):

1) $\displaystyle\int \frac{1}{senx}\,dx$

2) $\displaystyle\int \frac{3}{x^2+x+1}\,dx$

3) $\displaystyle\int_{-\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \sqrt{1-3x^2}\,dx$ ($3x^2$ deve diventare $sen^2 t$, quindi...)