INTEGRALI DELLE FUNZIONI RAZIONALI FRATTE
Quinta e ultima parte
1c) Denominatore di grado superiore al secondo

Vediamo ora come risolvere, in generale, un integrale del tipo $\int \frac{N(x)}{D(x)}dx$, dove $N(x)$ e $D(x)$ sono due polinomi, e il grado di $N(x)$ è inferiore a quello di $D(x)$.

● Per prima cosa, bisogna scomporre in fattori $D(x)$.

● Poi bisogna imporre l'identità appropriata. Ricordiamo che la scomposizione in fattori di $D(x)$, se è completa, può contenere fattori di primo grado, che corrispondono a soluzioni reali dell'equazione $D(x)=0$, e fattori irriducibili (non scomponibili) di secondo grado, che sono quelli che hanno $\Delta<0$. Ogni fattore può ricorrere una o più volte: per esempio, $2x-1$ (una volta) o $(2x-1)^3$ (tre volte). È importante che non appaiano distinti fattori multipli tra loro (per esempio, $(2x-1)(4x-2)$ va trasformato in $2(2x-1)^2$, per apprezzare la corretta molteplicità).

Nell'identità dobbiamo avere a primo membro $\frac{N(x)}{D(x)}$, mentre a secondo membro vanno inseriti:

- un termine del tipo $\frac{A}{ax+b}$ per ogni fattore del tipo $ax+b$;

- due termini del tipo $\frac{A}{ax+b}+\frac{B}{(ax+b)^2}$ per ogni fattore del tipo $(ax+b)^2$;

- tre termini del tipo $\frac{A}{ax+b}+\frac{B}{(ax+b)^2}+\frac{C}{(ax+b)^3}$ per ogni fattore del tipo $(ax+b)^3$;

- e così via;

- due termini del tipo $\frac{A(2ax+b)}{ax^2+bx+c}+\frac{B}{ax^2+bx+c}$ per ogni fattore del tipo ax^2+bx+c , con $\Delta=b^2-4ac<0$ (si noti che $2ax+b$ è la derivata di ax^2+bx+c);

- quattro termini del tipo $\frac{A(2ax+b)}{ax^2+bx+c}+\frac{B}{ax^2+bx+c}+\frac{C(2ax+b)}{(ax^2+bx+c)^2}+\frac{D}{(ax^2+bx+c)^2}$ per ogni fattore del tipo $(ax^2+bx+c)^2$, con $\Delta=b^2-4ac<0$;
- e così via.

● Successivamente dobbiamo determinare i valori delle costanti presenti ai numeratori dell'identità, riducendo in forma intera, portando tutto a primo membro ed uguagliando a zero tutti i coefficienti delle potenze di x e il termine noto, e infine risolvendo il sistema.

● Si sostituisce alla funzione integranda il secondo membro dell'identità iniziale, utilizzando i valori delle costanti che abbiamo trovato, si spezza l'integrale nella somma degli integrali delle singole frazioni, e si calcolano i singoli integrali.

Si ricordi che:

- **gli integrali del tipo $\int \frac{A}{ax+b}dx$ e $\int \frac{A(2ax+b)}{ax^2+bx+c}dx$ si riconducono alla forma $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx=\ln|f(x)|+C$;**
- **gli integrali del tipo $\int \frac{A}{(ax+b)^n}dx$ e $\int \frac{A(2ax+b)}{(ax^2+bx+c)^n}dx$ si riconducono alla forma $\int f'(x)\cdot[f(x)]^n dx=\frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1}+C$, in quanto $\int \frac{A}{(ax+b)^n}dx=\int A\cdot(ax+b)^{-n}dx$ e $\int \frac{A(2ax+b)}{(ax^2+bx+c)^n}dx=\int A(2ax+b)\cdot(ax^2+bx+c)^{-n}dx$;**
- **gli integrali del tipo $\int \frac{A}{ax^2+bx+c}dx$, con $\Delta=b^2-4ac<0$, si riconducono alla forma $\int \frac{f'(x)}{1+[f(x)]^2}dx=arctg\, f(x)+C$ mediante il metodo di sostituzione (che sarà oggetto di una lezione successiva) o, in alternativa, quello del completamento del quadrato;**
- **gli integrali del tipo $\int \frac{A}{(ax^2+bx+c)^n}dx$ si risolvono per parti, e saranno oggetto di una lezione successiva.**

2) Numeratore di grado pari o superiore al denominatore

Una premessa: 7 diviso 2 fa 3 con resto 1 . Perché? Perché $7=3\cdot 2+1$. Il dividendo 7 (numeratore di $\frac{7}{2}$) è uguale al prodotto tra il risultato 3 e il divisore 2 (denominatore di $\frac{7}{2}$), più il resto: $\frac{7}{2}=3+\frac{1}{2}$.

Analogamente, se eseguendo la divisione tra i polinomi $N(x)$ e $D(x)$ otteniamo risultato (quoziente) $Q(x)$ e resto $R(x)$, sarà perché $N(x)=Q(x)\cdot D(x)+R(x)$, e quindi, dividendo per $D(x)$, $\frac{N(x)}{D(x)}=Q(x)+\frac{R(x)}{D(x)}$. Quindi

$$\int \frac{N(x)}{D(x)}dx=\int \left(Q(x)+\frac{R(x)}{D(x)}\right)dx \quad .$$

Ora, l'integrale di un polinomio è facilmente calcolabile utilizzando la formula $\int x^n dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+C$, mentre nell'integrale $\int \frac{R(x)}{D(x)}dx$ il numeratore ha (per definizione di resto) grado minore del denominatore, e quindi siamo ricondotti al caso precedente.

Si osservi che, poiché il denominatore non ha, di norma, la forma $x\pm b$, non potremo, almeno in generale, eseguire la divisione con la regola di Ruffini, ma solo con il metodo ordinario.

Esempio:

Calcola $\int \frac{x^4+2x+1}{x^3-1}dx$.

Poiché x^4+2x+1 ha grado maggiore o uguale (nel nostro caso maggiore) di x^3-1 , eseguiamo, per prima cosa, la divisione $(x^4+2x+1):(x^3-1)$.

Ricordo che, nel dividendo a sinistra, dobbiamo inserire un termine per ogni potenza di x , comprese quelle mancanti (nel nostro caso x^3 e x^2), mentre non serve fare altrettanto per il divisore a destra.

$$x^4 \quad +0\cdot x^3 \quad +0\cdot x^2 \quad +2x \quad +1 \,\Big|\, \underline{x^3-1}$$

Dividiamo il termine di grado massimo a sinistra (x^4) per quello di grado massimo del denominatore (x^3), e indichiamo il risultato x sotto il divisore:

$$\begin{array}{cccccc|l} x^4 & +0\cdot x^3 & +0\cdot x^3 & +0\cdot x^2 & +2x & +1 & \underline{x^3-1} \\ & & & & & & x \end{array}$$

Moltiplichiamo il risultato x appena scritto per il divisore x^3-1 , e scriviamo il risultato cambiato di segno alla seconda riga a sinistra, facendo attenzione a incolonnare i termini con lo stesso grado:

$$\begin{array}{cccccc|l} x^4 & +0\cdot x^3 & +0\cdot x^3 & +0\cdot x^2 & +2x & +1 & \underline{x^3-1} \\ -x^4 & & & & +x & & x \end{array}$$

Sommiamo i risultati delle prime due righe a sinistra:

$$\begin{array}{ccccc|l} x^4 & +0\cdot x^3 & +0\cdot x^2 & +2x & +1 & \underline{x^3-1} \\ \underline{-x^4} & & & \underline{+x} & & x \\ 0 & 0 & 0 & +3x & +1 & \end{array}$$

Si continua il procedimento finché non si ottiene un risultato di grado inferiore al divisore. Nel nostro caso, poiché $3x+1$ è già di grado inferiore ad x^3-1 , la divisione è terminata. x è il risultato, mentre $3x+1$ è il resto. Di conseguenza

$$\frac{x^4+2x+1}{x^3-1}=x+\frac{3x+1}{x^3-1}$$ **, da cui**

$$\int\frac{x^4+2x+1}{x^3-1}dx=\int\left(x+\frac{3x+1}{x^3-1}\right)dx=$$

Spezziamo l'integrale a secondo membro:

$$=\int x\,dx+\int\frac{3x+1}{x^3-1}dx=$$

Utilizziamo la formula $\int x^n dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+C$, ricordando che $x=x^1$:

$$=\frac{x^2}{2}+\int\frac{3x+1}{x^3-1}dx=$$

Per il secondo integrale, siamo ricondotti al caso precedente. Scomponiamo in fattori il denominatore (è una differenza di cubi, quindi usiamo la formula $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab-b^2)$:

$$=\frac{x^2}{2}+\int\frac{3x+1}{(x-1)(x^2+x+1)}dx=$$

Nel fattore x^2+x+1 è $\Delta=1^2-4\cdot1\cdot1=-3<0$ (fattore irriducibile). Quindi dobbiamo imporre la seguente identità:

$$\frac{3x+1}{(x-1)(x^2+x+1)}\equiv\frac{A}{x-1}+\frac{B(2x+1)}{x^2+x+1}+\frac{C}{x^2+x+1}\ ,$$

dove A, B e C sono le costanti da determinare, e il fattore $2x+1$ che moltiplica B è la derivata del denominatore x^2+x+1 .

A questo punto dovreste essere in grado di contrinuare i calcoli da soli.

3) Considerazioni finali

Il metodo per integrare le funzioni razionali fratte che abbiamo imparato in queste lezioni è molto potente, in quanto, se siamo in grado di scomporre in fattori completamente un polinomio (e se conosciamo l'integrazione per parti, nel caso in cui fossimo così sfortunati da ottenere al denominatore un fattore $(ax^2+bx+c)^n$, con $\Delta<0$ e $n>1$), riusciamo ad integrare qualunque funzione razionale fratta, senza dover usare intuito o fantasia, ma solo le conoscenze che abbiamo appreso. Il prezzo da pagare, tuttavia, è che il calcolo può essere, in generale, tanto più laborioso quanto più alto è il grado del denominatore. In ogni caso non si tratta di calcoli brevi. Si consiglia fortemente, di conseguenza, di verificare preventivamente se non esista una strada alternativa più breve per l'esercizio che dobbiamo risolvere.

Esempio 1:

$$\int\frac{4x^3-6x}{x^4-3x^2-1}dx$$

Poiché il numeratore è la derivata del denominatore, usando direttamente la formula $\int\frac{f'(x)}{f(x)}dx=\ln|f(x)|+C$ otteniamo subito il risultato $\ln|x^4-3x^2-1|+C$. Applicando il metodo generale per integrale le funzioni razionali fratte avremmo dovuto fare molti calcoli; inoltre, probabilmente il risultato sarebbe stato espresso in una forma più elaborata.

Esempio 2:

$$\int\frac{x}{x^4-2x^2+2}dx=$$

Se completiamo il quadrato al denominatore, poiché $x^4-2x^2+2=x^4-2x^2+1+1=(x^2-1)^2+1$, otteniamo:

$$\int \frac{x}{(x^2-1)^2+1}dx=$$

Per poter applicare la formula $\int \frac{f'(x)}{1+[f(x)]^2}dx=arctg\,f(x)+C$ **, abbiamo bisogno di avere al numeratore la derivata della base del quadrato al denominatore. Poiché** $D(x^2-1)=2x$ **, moltiplichiamo e dividiamo per 2:**

$$\int \frac{1}{2}\cdot\frac{2x}{(x^2-1)^2+1}dx=$$

Portiamo fuori dall'integrale la costante moltiplicativa:

$$\frac{1}{2}\int \frac{2x}{(x^2-1)^2+1}dx=$$

Utilizziamo la formula $\int \frac{f'(x)}{1+[f(x)]^2}dx=arctg\,f(x)+C$ **, dove** $f(x)=x^2-1$ **e** $f'(x)=2x$ **:**

$$\frac{1}{2}arctg(x^2-1)+C \quad .$$

Quindi $\int \frac{x}{x^4-2x^2+2}dx=\frac{1}{2}arctg(x^2-1)+C$ **.**

Anche stavolta, applicare l'algoritmo appreso in queste lezioni sarebbe stato molto più lungo e laborioso (ammesso, e non concesso, di riuscire a scomporre in fattori il denominatore).

Riepilogando, possiamo dire che i metodi appresi in queste lezioni sono come un treno molto potente, che, in presenza di una funzione razionale fratta, ci consente di andare quasi ovunque. Ma è un treno a vapore: prima di prenderlo, meglio verificare se la località dove vogliamo andare è una delle poche collegate dall'alta velocità, perché in caso affermativo impiegheremmo molto meno tempo per arrivare alla nostra destinazione.