INTEGRALI DELLE FUNZIONI RAZIONALI FRATTE

Quarta parte

1b4) $\Delta<0$, numeratore di primo grado

Per calcolare un integrale del tipo $\int \frac{px+q}{ax^2+bx+c}dx$ **, con** $\Delta=b^2-4ac<0$ **, determiniamo per prima cosa due costanti A e B tali che**

$$\frac{px+q}{ax^2+bx+c}\equiv\frac{A\cdot D(ax^2+bx+c)}{ax^2+bx+c}+\frac{B}{ax^2+bx+c} ,$$

dove $D(ax^2+bx+c)$ **indica la derivata di** ax^2+bx+c **, ovvero** $2ax+b$ **.**

Esempio: calcola $\int \frac{5x-3}{x^2-2x+17}dx$ **.**

Una volta appurato che $\Delta=b^2-4ac=(-2)^2-4\cdot1\cdot17=4-68=-64<0$ **, imponiamo**

$$\frac{5x-3}{x^2-2x+17}\equiv\frac{A\cdot D(x^2-2x+17)}{x^2-2x+17}+\frac{B}{x^2-2x+17}$$ **, ovvero**

$$\frac{5x-3}{x^2-2x+17}\equiv\frac{A(2x-2)}{x^2-2x+17}+\frac{B}{x^2-2x+17} .$$

Moltiplichiamo entrambi i membri per $x^2-2x+17$ **:**

$$5x-3\equiv A(2x-2)+B$$

Effettuiamo i calcoli:

$$5x-3\equiv2Ax-2A+B$$

Portiamo tutto a primo membro:

$$5x-2Ax-3+2A-B\equiv0$$

Mettiamo in evidenza x dai termini di primo grado:

$$(5-2A)x-3+2A-B\equiv0$$

I due membri rappresentano polinomi identici se e solo se hanno gli stessi coefficienti, ovvero se tutti i coefficienti del polinomio a primo membro sono nulli:

$$\begin{cases}5-2A=0\\-3+2A-B=0\end{cases}$$

Risolviamo il sistema:

$$\begin{cases} A=\dfrac{5}{2} \\ -3+2\cdot\dfrac{5}{2}-B=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A=\dfrac{5}{2} \\ -3+5-B=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A=\dfrac{5}{2} \\ 2-B=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A=\dfrac{5}{2} \\ B=2 \end{cases} .$$

Quindi

$$\frac{5x-3}{x^2-2x+17}\equiv\frac{A(2x-2)}{x^2-2x+17}+\frac{B}{x^2-2x+17}$$ **, da cui:**

$$\int\frac{5x-3}{x^2-2x+17}dx=\int\left(\frac{\frac{5}{2}(2x-2)}{x^2-2x+17}+\frac{2}{x^2-2x+17}\right)dx=$$

Spezziamo l'integrale ($\int f(x)+g(x)\,dx=\int f(x)\,dx+\int g(x)\,dx$ **):**

$$=\int\frac{\frac{5}{2}(2x-2)}{x^2-2x+17}dx+\int\frac{2}{x^2-2x+17}dx=$$

Portiamo fuori dagli integrali le costanti moltiplicative:

$$=\frac{5}{2}\int\frac{2x-2}{x^2-2x+17}dx+2\int\frac{1}{x^2-2x+17}dx=$$

Nel primo integrale il numeratore $2x-2$ **è la derivata del denominatore** $x^2-2x+17$ **, per cui possiamo usare la formula** $\int\frac{f'(x)}{f(x)}dx=\ln|f(x)|+C$ **, dove** $f(x)=x^2-2x+17$ **, e quindi** $f'(x)=2x-2$ **:**

$$=\frac{5}{2}\ln|x^2-2x+17|+2\int\frac{1}{x^2-2x+17}dx= \text{ [1]}$$

1 Si noti che la costante additiva non è stata ancora inserita, in quanto sottintesa nel secondo integrale.

Poiché $\Delta<0$ e $a>0$, il trinomio $x^2-2x+17$ è positivo per ogni valore di x, e quindi $|x^2-2x+17|=x^2-3x+17$ (il modulo di un numero positivo o nullo è il numero stesso):

$$=\frac{5}{2}\ln(x^2-2x+17)+2\int\frac{1}{x^2-2x+17}dx=$$

Per risolvere il secondo integrale, useremo, come abbiamo fatto nella lezione precedente, il metodo del completamento del quadrato, trasformando per prima cosa $x^2-2x+17$ nella forma $(\alpha x-\beta)^2+\gamma$. Poiché x^2 è il quadrato di x e il doppio prodotto è (a parte il segno), $2x$, il secondo termine deve essere 1. Sommiamo e sottraiamo $\beta^2=1^2=1$ al denominatore:

$$=\frac{5}{2}\ln(x^2-2x+17)+2\int\frac{1}{x^2-2x+1-1+17}dx=$$

x^2-2x+1 **è il quadrato di** $x-1$ **:**

$$=\frac{5}{2}\ln|(x^2-2x+17)|+2\int\frac{1}{(x-1)^2+16}dx=$$

Per ottenere al denominatore una forma del tipo $[f(x)]^2+1$, mettiamo in evidenza 16:

$$=\frac{5}{2}\ln(x^2-2x+17)+2\int\frac{1}{16\left[\frac{(x-1)^2}{16}+1\right]}dx=$$

Portiamo fuori dal secondo integrale la costante moltiplicativa:

$$=\frac{5}{2}\ln(x^2-2x+17)+2\cdot\frac{1}{16}\int\frac{1}{\frac{(x-1)^2}{16}+1}dx=$$

Trasformiamo il 16 al denominatore della funzione integranda in un quadrato:

$$=\frac{5}{2}\ln(x^2-2x+17)+\frac{1}{8}\int\frac{1}{\frac{(x-1)^2}{4^2}+1}dx=$$

Il quoziente tra due potenze con lo stesso esponente è una potenza con lo stesso esponente, avente per base il quoziente tra le basi:

$$=\frac{5}{2}\ln(x^2-2x+17)+\frac{1}{8}\int\frac{1}{\left(\frac{x-1}{4}\right)^2+1}dx=$$

Ora il denominatore dell'integrale ha la forma $[f(x)]^2+1$, dove $f(x)=\frac{x-1}{4}$.

Per applicare la formula $\int \frac{f'(x)}{1+[f(x)]^2}dx=arctg\, f(x)+C$ ci serve al numeratore della funzione integranda la derivata di $\frac{x-1}{4}$. Poiché 4 è costante,

$$f'(x)=D\left(\frac{x-1}{4}\right)=D\left(\frac{1}{4}(x-1)\right)=\frac{1}{4}\cdot D(x-1)=\frac{1}{4}$$.

Moltiplichiamo e dividiamo quindi la funzione integranda per $\frac{1}{4}$:

$$=\frac{5}{2}\ln(x^2-2x+17)+\frac{1}{8}\int \frac{4\cdot\frac{1}{4}}{\left(\frac{x-1}{4}\right)^2+1}dx=$$

Portiamo fuori dall'int $\int \frac{f'(x)}{1+[f(x)]^2}dx=arctg\, f(x)+C$ egrale la costante moltiplicativa non necessaria per l'applicazione della formula $\int \frac{f'(x)}{1+[f(x)]^2}dx=arctg\, f(x)+C$:

$$=\frac{5}{2}\ln(x^2-2x+17)+\frac{1}{8}\cdot 4\int \frac{\frac{1}{4}}{\left(\frac{x-1}{4}\right)^2+1}dx=$$

$\int \frac{f'(x)}{1+[f(x)]^2}dx=arctg\, f(x)+C$ $\int \frac{f'(x)}{1+[f(x)]^2}dx=arctg\, f(x)+C$

$$=\frac{5}{2}\ln(x^2-2x+17)+\frac{1}{2}\int \frac{\frac{1}{4}}{\left(\frac{x-1}{4}\right)^2+1}dx=$$

Calcoliamo il secondo integrale, utilizzando la formula $\int \frac{f'(x)}{1+[f(x)]^2}dx=arctg\, f(x)+C$ **, dove** $f(x)=\frac{x-1}{4}$ **, e quindi** $f'(x)=\frac{1}{4}$ **:**

$$=\frac{5}{2}\ln(x^2-2x+17)+\frac{1}{2}arctg\,\frac{x-1}{4}+C$$

Riepilogando,

$$\int \frac{5x-3}{x^2-2x+17}dx=\frac{5}{2}\ln(x^2-2x+17)+\frac{1}{2}arctg\,\frac{x-1}{4}+C \quad .$$

Il seguito alla prossima puntata…

Esercizi:

1) $\int \frac{3x-7}{x^2-2x+5}dx$

2) $\int \frac{2x+1}{x^2-3x+9}dx$