EFFETTO JOULE IN CORRENTE ALTERNATA

Sappiamo che il lavoro compiuto dalle forze elettriche in un circuito elettrico attraversato da una corrente continua è $W = R i^2 t$, dove R è la resistenza elettrica, i l'intensità di corrente, e t il tempo.

Sappiamo anche che l'intensità di una corrente alternata è $i = i_0 sen(\omega t)$, dove $\omega = \frac{2\pi}{T}$ e T è il periodo della corrente.

Quindi il lavoro compiuto dalle forze elettriche in un circuito elettrico attraversato da una corrente alternate in un intervallo di tempo infinitesimo è dt è $dw = R i^2 dt$.

Possiamo calcolare il lavoro compiuto tra gli istanti 0 e T integrando entrambi i membri:

$$\int_0^W dw = \int_0^T R i^2 dt$$

Si noti che gli estremi di integrazione a primo membro sono i valori del lavoro corrispondenti agli istanti 0 e T.

Calcoliamo una primitiva a primo membro, e sostituiamo $i_0 sen(\omega t)$ al posto di i :

$$[w]_0^W = \int_0^T R [i_0 sen(\omega t)]^2 dt$$

A primo membro sfruttiamo il teorema di Torricelli-Barrow, secondo cui $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$, dove $F(x)$ è una primitiva di $f(x)$, mentre a secondo membro calcoliamo il quadrato:

$$W - 0 = \int_0^T R i_0^2 sen^2(\omega t) dt$$

Portiamo fuori dall'integrale le costanti moltiplicative:

$$W = R i_0^2 \int_0^T sen^2(\omega t) dt$$

Utilizziamo la formula di bisezione del seno, ovvero $sen \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{2}}$, da cui, elevando al quadrato,

$sen^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{2}$. Se poniamo $\frac{\alpha}{2}=\omega t$, moltiplicando per 2 otteniamo $\alpha=2\omega t$, e quindi $sen^2(\omega t)=\frac{1-\cos(2\omega t)}{2}$:

$$W=R i_0^2\int_0^T \frac{1-\cos(2\omega t)}{2}dt$$

Portiamo fuori dall'integrale la costante moltiplicativa:

$$W=\frac{1}{2}R i_0^2\int_0^T [1-\cos(2\omega t)]\,dt$$

Spezziamo l'integrale:

$$W=\frac{1}{2}R i_0^2\left\{\int_0^T dt-\int_0^T \cos(2\omega t)\,dt\right\}$$

Calcoliamo il primo integrale, analogamente al precedente:

$$W=\frac{1}{2}R i_0^2\left\{[t]_0^T-\int_0^T \cos(2\omega t)\,dt\right\}=\frac{1}{2}R i_0^2\left\{T-0-\int_0^T \cos(2\omega t)\,dt\right\}$$

Possiamo calcolare l'ultimo integrale utilizzando la formula $\int f'(x)\cdot\cos f(x)=sen\,f(x)+C$. Per questo moltiplichiamo e dividiamo per la derivata di $f(x)=2\omega t$, ovvero per 2ω :

$$W=\frac{1}{2}R i_0^2\left\{T-\int_0^T \frac{1}{2\omega}\cdot 2\omega\cdot\cos(2\omega t)\,dt\right\}$$

Portiamo fuori dall'integrale la costante moltiplicativa che non serve a calcolare l'integrale:

$$W=\frac{1}{2}R i_0^2\left\{T-\frac{1}{2\omega}\int_0^T 2\omega\cdot\cos(2\omega t)\,dt\right\}$$

Utilizziamo la formula $\int f'(x)\cdot\cos f(x)=sen\,f(x)+C$ per trovare una primitiva della funzione integranda:

$$W=\frac{1}{2}R i_0^2\left\{T-\frac{1}{2\omega}[sen(2\omega t)]_0^T\right\}$$

Utilizziamo nuovamente il teorema di Torricelli-Barrow:

$$W=\frac{1}{2}R i_0^2\left\{T-\frac{1}{2\omega}[sen(2\omega T)-sen(2\omega\cdot 0)]\right\}$$

Ricordiamo che $\omega=\frac{2\pi}{T}$:

$$W=\frac{1}{2}R i_0^2\left\{T-\frac{1}{2\omega}\left[sen\left(2\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot T\right)-sen\,0\right]\right\}$$

Semplifichiamo e calcoliamo $sen\,0$ **:**

$$W=\frac{1}{2}R i_0^2\left\{T-\frac{1}{2\omega}\left[sen(4\pi)-0\right]\right\}$$

Per la periodicità della funzione seno, $sen(4\pi)=sen\,0=0$ **:**

$$W=\frac{1}{2}R i_0^2\left\{T-\frac{1}{2\omega}\cdot 0\right\}$$

Quindi

$$W=\frac{1}{2}R i_0^2 T$$

Definizione: si dice intensità efficace (e viene indicata con i_{eff} **) di una corrente alternata quella che deve avere una corrente continua per compiere mediamente lo stesso lavoro. Poiché il lavoro in corrente continua compiuti nel tempo T è** $W'=R i_{eff}^2 T$ **, mentre quello in corrente alternata, come abbiamo visto, è** $W=\frac{1}{2}R i_0^2 T$ **, deve essere**

$$R i_{eff}^2 T=\frac{1}{2}R i_0^2 T$$

Dividendo per RT otteniamo:

$$i_{eff}^2=\frac{1}{2}i_0^2$$

Ed estraendo radice:

$$i_{eff}=\frac{i_0}{\sqrt{2}}$$

In altre parole, una corrente continua di intensità $i_{eff}=\frac{i_0}{\sqrt{2}}$ **compie mediamente lo stesso lavoro di una corrente alternata di intensità** $i=i_0\,sen(\omega t)$ **.**