Una radio a tachioni ~ versione numerica ~ pag.1

Problema su spazio-tempo di Minkowski e trasformazioni di Lorentz

L'astronave di Star Trek, comandata dal comandante Kirk, parte dalla stazione spaziale Deep Space Nine, alla posizione $x=0\,al$, nell'istante $t=0\,a$, alla velocità $v=\frac{7}{8}c$. Spock rimane fermo sulla stazione spaziale, e all'istante $t=2\,a$ invia, utilizzando una radio a tachioni, un segnale che viaggia a velocità $2\,c$ verso il comandante Kirk, che, utilizzando un dispositivo identico, lo reinvia a Spock.
Determina, in un diagramma spazio-tempo di Minkowski, le equazioni delle rette che rappresentano, sia nel sistema di riferimento della stazione spaziale, sia in quella dell'astronave: a) la traiettoria dell'astronave; b) quella di Spock; c) gli estremi del cono di luce; d) la traiettoria del segnale inviato da Spock; la traiettoria del segnale di risposta inviato da Kirk; e) le coordinate degli eventi che rappresentano la ricezione dei segnali da parte di Kirk e di Spock.

Nota: questo problema è ispirato al video presente all'indirizzo https://www.youtube.com/watch?v=DlyG1WpfJaM.

Svolgimento

Astronave, sistema della stazione spaziale

Partiamo dalla definizione di velocità media, ovvero $v=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{x_2-x_1}{t_1-t_1}$. In questa formula x_1 sarà la posizione nota nell'istante iniziale t_1 , mentre t_2 e x_1 saranno il generico istante t e la relativa posizione x .

$$\frac{x_2-x_1}{t_2-t_1}=v_{astronave} \qquad \frac{x-0}{t-0}=\frac{7}{8}c \;\; ; \;\; \frac{x}{t}=\frac{7}{8}c \;\; ; \;\; \frac{7}{8}c=\frac{x}{t} \;\; ; \;\; ct=\frac{8}{7}x$$

Spock, sistema della stazione spaziale

$x=0$ (Spock è fermo nel suo sistema di riferimento).

Rette che delimitano il cono di luce, sistema della stazione spaziale

$ct=\pm x$ (bisettrici dei quadranti).

Segnale inviato da Spock, sistema della stazione spaziale

Partiamo, anche in questo caso, dalla formula che definisce la velocità media:

$$\frac{x_2-x_1}{t_2-t_1}=v_{segnale} \;;\quad \frac{x-0}{t-2}=2c \;;\quad x=2c(t-2) \;;\quad x=2ct-4c \;;$$

$$2ct=x+4c \;;\quad ct=\frac{1}{2}x+2c$$

Evento ricezione segnale, sistema della stazione spaziale

Poiché le equazioni $ct=\frac{1}{m}x+c\tau$ e $ct=\frac{1}{f}x$ associano rispettivamente alla posizione del segnale e a quella dell’astronave l’istante in cui tale posizione è assunta, posizione e istante della ricezione del segnale si ottengono mettendo a sistema le due equazioni (x e t devono essere gli stessi per entrambe).

$$\begin{cases} ct=\frac{1}{2}x+2c \\ ct=\frac{8}{7}x \end{cases} ;\quad \begin{cases} \frac{8}{7}x=\frac{1}{2}x+2c \\ ct=\frac{8}{7}x \end{cases} ;\quad \begin{cases} 16x=7x+28c \\ ct=\frac{8}{7}x \end{cases}$$

$$\begin{cases} 9x=28c \\ ct=\frac{8}{7}x \end{cases} ;\quad \begin{cases} x=\frac{28}{9}c \\ ct=\frac{8}{7}\cdot\frac{28}{9}c=\frac{32}{9}c \end{cases} ;\quad P\left(\frac{28}{9}c\,;\frac{32}{9}c\right)$$

Trasformazioni di Lorentz (da utilizzare nel seguito):

$$\begin{cases} x'=\gamma(x-Vt) \\ t'=\gamma\left(t-\frac{\beta}{c}x\right) \end{cases}$$

Trasformazioni di Lorentz inverse (si ottengono scambiando x e t con x' e t' e cambiando segno alla velocità):

$$\begin{cases} x=\gamma(x'+Vt') \\ t=\gamma\left(t'+\frac{\beta}{c}x'\right) \end{cases}$$

Calcolo di γ : $\gamma=\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}=\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{\frac{7}{8}c}{c}\right)^2}}=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{49}{64}}}=$

$$=\frac{1}{\sqrt{\frac{64-49}{64}}}=\frac{1}{\sqrt{\frac{15}{64}}}=\frac{1}{\frac{\sqrt{15}}{8}}=\frac{8}{\sqrt{15}}$$

Posizione ricezione segnale, sistema dell'astronave

Partiamo dalle coordinate dell'evento nel sistema della stazione spaziale:

$$\begin{cases} x=\frac{28}{9}c \\ ct=\frac{32}{9}c \end{cases}$$

e applichiamo le trasformazioni di Lorentz

$$\begin{cases} x'=\gamma(x-Vt) \\ t'=\gamma\left(t-\frac{\beta}{c}x\right) \end{cases}$$

per ricavare x' **e** t' **. Osserviamo che** $ct=\frac{32}{9}c\Rightarrow t=\frac{32}{9}$ **(dobbiamo usare usare ct nelle coordinate dell'evento, t nelle trasformazioni di Lorentz).**

$$\begin{cases} x'=\frac{8}{\sqrt{15}}\left(\frac{28}{9}c-\frac{7}{8}c\cdot\frac{32}{9}\right) \\ t'=\frac{8}{\sqrt{15}}\left(\frac{32}{9}-\frac{\frac{7}{8}}{c}\cdot\frac{28}{9}c\right) \end{cases} ; \qquad \begin{cases} x'=\frac{8}{\sqrt{15}}\left(\frac{28}{9}c-\frac{28}{9}c\right) \\ t'=\frac{8}{\sqrt{15}}\left(\frac{32}{9}-\frac{49}{18}\right) \end{cases} ;$$

$$\begin{cases} x'=\frac{8}{\sqrt{15}}\cdot 0 \\ t'=\frac{8}{\sqrt{15}}\left(\frac{64-49}{18}\right) \end{cases} ; \qquad \begin{cases} x'=0 \\ t'=\frac{8}{\sqrt{15}}\cdot\frac{15}{18} \end{cases} ; \qquad \begin{cases} x'=0 \\ t'=\frac{4}{9}\sqrt{15}\approx 1{,}72\,a \end{cases} ;$$

$$\begin{cases} x'=0 \\ ct'=\frac{4}{9}\sqrt{15}\,c \end{cases}$$ $P'\left(0;\frac{4}{9}\sqrt{15}\,c\right)$ (ovviamente $x'=0$, essendo l'astronave ferma nel proprio sistema di riferimento).

Astronave, sistema dell'astronave

Partiamo dalla traiettoria nel sistema della stazione spaziale, ovvero $ct=\frac{8}{7}x$, e usiamo le trasformazioni inverse di Lorentz

$$\begin{cases} x=\gamma(x'+Vt') \\ t=\gamma\left(t'+\frac{\beta}{c}x'\right) \end{cases} :$$

$$c\gamma\left(t'+\frac{\beta}{c}x'\right)=\frac{8}{7}\gamma(x'+Vt') \;; \qquad c\left(t'+\frac{\frac{7}{8}}{c}x'\right)=\frac{8}{7}\left(x'+\frac{7}{8}ct'\right) \;;$$

$$ct'+\frac{7}{8}x'=\frac{8}{7}x'+ct' \;; \qquad \frac{7}{8}x'-\frac{8}{7}x'=ct'-ct' \qquad \frac{49-64}{56}x'=0 \;;$$

$-\frac{15}{56}x'=0$; $x'=0$ (ovvio: l'astronave è ferma nel proprio sistema di riferimento!)

Spock, sistema dell'astronave

Anche in questo caso partiamo dalla traiettoria nel sistema della stazione spaziale, e utilizziamo le trasformazioni inverse di Lorentz:

$$x=0 \;; \qquad \gamma(x'+Vt')=0 \;; \qquad x'+\frac{7}{8}ct'=0 \;; \qquad \frac{7}{8}ct'=-x' \;;$$

$$ct'=-\frac{8}{7}x'$$

Rette che delimitano il cono di luce, sistema dell'astronave

Partiamo anche in questo caso dalla traiettoria nel sistema della stazione spaziale, ovvero $ct=\pm x$, e utilizziamo le trasformazioni inverse di Lorentz:

$$c\gamma\left(t'+\frac{\beta}{c}x'\right)=\pm\gamma(x'+Vt') \quad ; \qquad c\left(t'+\frac{\frac{7}{8}}{c}x'\right)=\pm\left(x'+\frac{7}{8}ct'\right) \quad ;$$

$$ct'+\frac{7}{8}x'=\pm x'\pm\frac{7}{8}ct' \quad ; \qquad ct'\mp\frac{7}{8}ct'=\pm x'-\frac{7}{8}x' \quad ;$$

$$ct'\left(1\mp\frac{7}{8}\right)=x'\left(\pm 1-\frac{7}{8}\right) \quad ; \quad ct'\left(1\mp\frac{7}{8}\right)=\pm x'\left(1\mp\frac{7}{8}\right) \quad ; \quad ct'=\pm x'$$

(gli estremi del cono di luce sono SEMPRE le bisettrici dei quadranti: in altre parole, sono invarianti per le trasformazioni di Lorentz)

Traiettoria del segnale di risposta, sistema dell'astronave

Partiamo, anche in questo caso, dalla formula che definisce la velocità media.

$$\frac{x'_2-x'_1}{t'_2-t'_1}=v_{segnale} \quad ; \qquad \frac{x'-0}{t'-\frac{4}{9}\sqrt{15}}=2c \quad ; \qquad x'=2c\left(t'-\frac{4}{9}\sqrt{15}\right) \quad ;$$

$$x'=2ct'-\frac{4}{9}c\sqrt{15} \quad ; \quad 2ct'=x'+\frac{4}{9}c\sqrt{15} \quad ; \quad ct'=\frac{1}{2}x'+\frac{4}{9}c\sqrt{15}$$

Traiettoria del segnale di risposta, sistema della stazione spaziale

Stavolta partiamo dalla traiettoria nel sistema dell'astronave, e utilizziamo le trasformazioni di Lorentz.

$$ct'=\frac{1}{2}x'+\frac{4}{9}c\sqrt{15} \quad ; \qquad c\gamma\left(t-\frac{\beta}{c}x\right)=\frac{1}{2}\gamma(x-Vt)+\frac{4}{9}c\sqrt{15} \quad ;$$

$$c\cdot\frac{8}{\sqrt{15}}\left(t-\frac{\frac{7}{8}}{c}x\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{8}{\sqrt{15}}\left(x-\frac{7}{8}ct\right)+\frac{4}{9}c\sqrt{15} \quad ;$$

$$\frac{\sqrt{15}}{8}\cdot c\cdot\frac{8}{\sqrt{15}}\left(t-\frac{\frac{7}{8}}{c}x\right)=\frac{\sqrt{15}}{8}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{8}{\sqrt{15}}\left(x-\frac{7}{8}ct\right)+\frac{\sqrt{15}}{8}\cdot\frac{4}{9}c\sqrt{15} \quad ;$$

$$c\left(t-\frac{\frac{7}{8}}{c}x\right)=\frac{1}{2}\left(x-\frac{7}{8}ct\right)+\frac{4\left(\sqrt{15}\right)^2}{8\cdot 9}c \quad ; \qquad ct-\frac{7}{8}x=\frac{1}{2}x-\frac{7}{16}ct+\frac{15}{18}c \quad ;$$

$ct+\frac{7}{16}ct=\frac{1}{2}x+\frac{7}{8}x+\frac{5}{6}c$; $ct\left(1+\frac{7}{16}\right)=\left(\frac{1}{2}+\frac{7}{8}\right)x+\frac{5}{6}c$;

$ct\left(\frac{16+7}{16}\right)=\left(\frac{4+7}{8}\right)x+\frac{5}{6}c$; $\frac{23}{16}ct=\frac{11}{8}x+\frac{5}{6}c$;

$\frac{16}{23}\cdot\frac{23}{16}ct=\frac{16}{23}\cdot\frac{11}{8}x+\frac{16}{23}\cdot\frac{5}{6}c$; $ct=\frac{22}{23}x+\frac{40}{69}c$.

Ricezione del segnale di risposta, sistema della stazione spaziale

Poiché le equazioni $ct=\frac{22}{23}x+\frac{40}{69}c$ e $x=0$ associano rispettivamente alla posizione del segnale e a quella della stazione spaziale l'istante in cui tale posizione è assunta, posizione e istante della ricezione del segnale di risposta si ottengono mettendo a sistema le due equazioni (x e t devono essere gli stessi per entrambe).

$\begin{cases} ct=\frac{22}{23}x+\frac{40}{69}c \\ x=0 \end{cases}$; $\begin{cases} ct=\frac{40}{69}c \\ x=0 \end{cases}$; $Q\left(0;\frac{40}{69}c\right)$ **. Il segnale di risposta viene ricevuto all'istante $t_2=\frac{40}{69}\approx 0{,}58\,a$, ovvero molto prima (più di 1 anno e 5 mesi prima) dell'istante dell'invio del primo segnale, che è $t_1=2\,a$! Se fosse possibile realizzare una radio a tachioni, potremmo mandare segnali nel passato (e, quindi, influenzarlo)!**